ния: $\omega^0_{\hat\alpha}=0$, $\omega^{\alpha}_{\hat\alpha}=A^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}\omega^{\beta}_0$, $\omega^{n+1}_a=A^{n+1}_{a\alpha}\omega^{\alpha}_0$, $\omega^a_{n+1}=A^a_{n+1,\alpha}\omega^{\alpha}_0$,

$$\nabla A^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}\wedge\omega^{\beta}_0=0,\quad \nabla A^{n+1}_{a\beta}\wedge\omega^{\beta}_0=0,\quad \nabla A^a_{n+1,\beta}\wedge\omega^{\beta}_0=0,$$

$$A^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}=-\varepsilon_{\hat\alpha}\varepsilon_{\alpha}A^{\hat\alpha}_{\hat\gamma\beta},\quad A^a_{n+1,\alpha}=-\varepsilon_a\varepsilon_{\alpha}A^{n+1}_{a\alpha}\quad (a,b,c=\overline{m+1,n}).$$

Отсюда с учетом ([4], (28)) следует

Т е о р е м а I. Неизотропная m - поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ является m - поверхностью класса S^1_m (S^2_m) тогда и только тогда, когда она является m - поверхностью класса S_m (S^3_m).

4. Из ([4], (31), (32)) с учетом (8) и (9) вытекает, что на неизотропной m - поверхности V_m в ${}^{e}S_{n+1}$ класса $S_{m,r}$ выполняются следующие соотношения

$$\omega^{\hat\alpha}_{\alpha_2}=0,\quad \omega^{\hat\alpha}_{\alpha_1}=A^{\hat\alpha}_{\alpha_1\beta_1}\omega^{\beta_1}_0,\quad \omega^{\alpha_2}_{\hat\alpha}=0,\quad \omega^{\alpha_1}_{\hat\alpha}=A^{\alpha_1}_{\hat\alpha\beta_1}\omega^{\beta_1}_0,$$

$$A^{\alpha_1}_{\hat\alpha\beta_1}=-\varepsilon_{\alpha_1}\varepsilon_{\hat\alpha}A^{\hat\alpha}_{\alpha_1\beta_1}\quad (\alpha_1,\beta_1=\overline{1,r};\ \alpha_2,\beta_2=\overline{r+1,m}).$$

Отсюда с учетом (5) и (6) и результатов пункта 7 статьи [4] следует

Т е о р е м а 2. На неизотропной тангенциально-вырожде ной ранга r m - поверхности V_m в ${}^{e}S_{n+1}$ (или класса $S_{m,r}$) только на ней многообразие линейных подпространств

$$\tilde\Gamma \cup P_r = (A_0\ A_1 \ldots A_r\ A_{m+1} \ldots A_{n+1})$$

является r-мерным. Здесь линейное подпространство $\tilde\Gamma \subset L_m$ полярно сопряжено подпространству Γ_{m-r} относительно $L_m \cap Q$.

Заметим, что неизотропная m - поверхность V_m в ${}^{e}S_{n+1}$ каждого из классов S^1_m, S^2_m и $S_{m,r}$ согласно теоремам I и 2 обладает теми же геометрическими свойствами, которые определяются соответствующими инвариантными связностями в [5].

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. моск. матем. об-ва. М., 1953. Т.2. С.275-382.

2. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Неевклидовы геометрии. М.: ГИТТЛ, 1955.

3. И в л е в Е.Т. Некоторые геометрические объекты многомерной поверхности в невырожденных неевклидовых пространствах // Известия вузов. Математика. 1968. № II. С.93-104.

4. И в л е в Е.Т. Об одной классификации оснащенных ногомерных поверхностей проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. аучн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. .49-56.

5. И в л е в Е.Т. Об инвариантных расслоениях и связностях в них на оснащенной поверхности проективного пространства // Там же. 1992. Вып.23. С.41-45.

ДК 514.75

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК, КАСАЮЩИХСЯ ДРУГ ДРУГА

Л.Г.К о р с а к о в а

(Калининградский государственный университет)

В пространстве P_3 рассматривается пара $\mathcal{L}$ конгруэнций коник C_1 и C_2, находящихся в различных плоскостях и касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей в одной точке A_1. Плоскости коник описывают двумерные многообразия. Для расслояемых пар $\mathcal{L}$ доказана классификационная теорема.

Пара $\mathcal{L}$ исследуется в репере $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,4})$, где A_2 - точка, инцидентная прямой ℓ, точки A_3 и A_4 выбираются так, что треугольники $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$ являются автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно C_1 и C_2. Инфинитезимальные перемещения репера R определяются деривационными формулами $dA_\alpha=\omega^{\beta}_{\alpha}A_{\beta}$, причем формы Пфаффа ω^{β}_{α} удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega^{\beta}_{\alpha}=\omega^{\gamma}_{\alpha}\wedge\omega^{\beta}_{\gamma}$ и условию $\omega^{\alpha}_{\alpha}=0$. Уравнения коник C_1 и C_2 и система пфаффовых уравнений пары $\mathcal{L}$ в репере R имеют вид:

$$(x^2)^2-2x^1x^4=0,\quad x^3=0;\quad (x^2)^2-2x^1x^3=0,\quad x^4=0; \tag{I}$$

$$\begin{cases} \omega^2_1=\Gamma^{2k}_1\omega_k,\quad \omega^3_i=\Gamma^{3k}_i\omega_k,\quad \omega^4_3=\Gamma^{4k}_3\omega_k,\quad \omega^3_4=\Gamma^{3k}_4\omega_k,\\ \omega^2_4-\omega^1_2=\lambda^k\omega_k,\quad \omega^2_3-\omega^1_2=\mu^k\omega_k,\quad \omega^1_4=\Gamma^{1k}_4\omega_k,\\ \omega^1_3=\Gamma^{1k}_3\omega_k,\quad \Omega_1=a^k\omega_k,\quad \Omega_2=b^k\omega_k, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\omega_i \overset{def}{=} \omega_i^4\,,\quad \Omega_1 \overset{def}{=} \omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2\,,\quad \Omega_2 \overset{def}{=} \omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_2^2\,,$$

$i, j, k = 1,2\,;\ i \neq j$ и по этим индексам суммирование не произв дится.

Пары $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом одиннадц ти функций двух аргументов. Обозначая буквой δ дифференциро вание по вторичным параметрам и буквами π_α^β значения форм ω при фиксированных первичных параметрах, из замыканий уравнен (2) находим:

$$\delta(\Gamma_2^{32} - \Gamma_1^{31}) = (\pi_4^4 - \pi_3^3)(\Gamma_2^{32} - \Gamma_1^{31}) + 2\Gamma_1^{32}\pi_2^1. \tag{3}$$

Предполагая, что прямолинейная конгруэнция (ℓ), ассоцииров ная с парой $\mathcal{L}$, не является параболической, т.е. выполняетс неравенство

$$(\Gamma_1^{31} - \Gamma_2^{32})^2 + 4\Gamma_1^{32}\,\Gamma_2^{31} \neq 0\,, \tag{4}$$

можно осуществить следующую фиксацию репера R :

$$\Gamma_1^{31} - \Gamma_2^{32} = 0\,. \tag{5}$$

Тогда, поскольку $\Gamma_1^{32}\,\Gamma_2^{31} \neq 0$, то из (3) следует, что $\pi_2^1 = 0$ все компоненты ω_α^β деривационных формул репера R, кроме ди гональных, являются главными формами пары $\mathcal{L}$. Условие (5) ометрически характеризуется тем, что точка A_2 совмещается с точкой, являющейся четвертой гармонической к точке A_1 относ тельно фокусов прямолинейной конгруэнции (ℓ).

О п р е д е л е н и е. Пара $\mathcal{L}$ называется расслояемой, если : I) существуют односторонние расслоения от конгруэнций (C_1), (C_2) и (A_1A_2) к конгруэнции (A_3A_4); 2) прямая A_3A_4 не инцидентна касательной плоскости к поверхности A_1 .

Система пфаффовых и квадратичных уравнений, определяющи расслояемую пару $\mathcal{L}$, имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k\,, \quad \omega_1^3 = \Gamma_1^{3k}\omega_k\,, \quad \omega_2^3 = \Gamma_2^{31}\omega_1 + \Gamma_1^{31}\omega_2\,, \\ \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k\,, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k\,, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k\,, \\ \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k\,, \quad \Omega_1 = a^k\omega_k\,, \quad \Omega_2 = b^k\omega_k\,; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \omega_3^2 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad \omega_4^2 \wedge \omega_1^2 = 0\,, \quad \omega_3^1 \wedge (2\omega_2^1 - \omega_3^2) = 0, \quad \omega_4^1 \wedge (2\omega_2^1 - \omega_4^2) = 0, \\ \omega_i^3 \wedge \omega_3^j + \omega_i \wedge \omega_4^j = 0, \quad \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0, \\ \Omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^4 \wedge \omega_4^2 - 2\omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad \Omega_1 \wedge \omega_3^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_3^4 \wedge \omega_4^1 = 0, \\ \Omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_3^4 \wedge \omega_3^2 - 2\omega_4^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad \Omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_3^4 \wedge \omega_3^1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Т е о р е м а. Существует два проективно неэквивалентных асса расслояемых пар $\mathcal{L}$ – пары $\mathcal{L}_1$, определяемые с произволом двенадцати функций одного аргумента, и пары $\mathcal{L}_2$, определяемые с произволом одиннадцати функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Анализируя систему (7), учитывая неравенство $\omega_1^2 \neq 0$ (определение расслояемой пары $\mathcal{L}$, ловие 2), а также возможность перенумерования вершин A_3 и A_4 репера R, приходим к выводу, что расслояемые пары $\mathcal{L}$ разваются на 2 типа:

$$\text{I} \qquad \omega_3^1 \neq 0\,, \tag{8}$$

$$\text{II} \qquad \omega_3^1 = 0\,. \tag{9}$$

всех остальных случаях имеем

$$\operatorname{rang}\,(\omega_3^1\,,\ \omega_3^2\,,\ \omega_4^1\,,\ \omega_4^2) < 2\,, \tag{10}$$

начит, прямолинейная конгруэнция (A_3A_4), ассоциированная с арой $\mathcal{L}$, вырождается либо в линейчатую поверхность, либо в подвижную прямую, что противоречит определению расслояемой ары $\mathcal{L}$. Расслояемые пары $\mathcal{L}$, определяемые соответственно условиями (8) и (9), являются парами $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Плоскость $(A_2A_3A_4)$, ассоциированная с парой $\mathcal{L}_2$, есть касательная плоскость к поверхности (A_3) в точке A_3 .

Докажем теорему существования для пар $\mathcal{L}_1$. Покажем сначала, что формы ω_3^1 и ω_3^2 линейно независимы и поэтому их можно ринять в качестве базисных форм пары $\mathcal{L}_1$.

Предположим противное:

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = 0\,.$$

огда из (7) имеем следующие квадратичные уравнения:

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = 0, \quad \omega_3^2 \wedge \omega_1^2 = 0\,, \quad \omega_4^2 \wedge \omega_1^2 = 0\,, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0\,.$$

оскольку $\omega_1^2 \neq 0$, то $\omega_3^2 \wedge \omega_4^2 = 0$ и $\omega_4^2 \wedge \omega_2^1 = 0$. В силу леммы Картана имеем: $\omega_4^2 = e\,\omega_2^1$ ($\omega_2^1 \neq 0$, иначе (A_3A_4) – линейчатая поверхность, что противоречит определению расслояемой пары $\mathcal{L}$). Подставляя полученное соотношение в уравнение

$$\omega_4^1 \wedge (2\omega_2^1 - \omega_4^2) = 0\,,$$

удем иметь:

$$(2 - e)\,\omega_4^1 \wedge \omega_2^1 = 0\,.$$

Если $2 - e \neq 0$, то $\omega_4^1 \wedge \omega_2^1 = 0$, и приходим к неравенству (10). Значит, $2 - e = 0$, т.е. $\omega_4^2 = 2\omega_2^1$. Замыкая это уравнение с учетом системы (7), опять приходим к неравенству (IO). Зна

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \neq 0 .$$

Обозначим $\omega_3^1 = \omega^1$, $\omega_3^2 = \omega^2$. Система пфаффовых и коне ных уравнений пары $\mathcal{L}_1$ приводится к виду:

$$\omega_1^2 = a\omega^2, \quad \omega_4^2 = b\omega^2, \quad 2\omega_2^1 = c\omega^1 + \omega^2, \quad \omega_4^1 = h(2\omega_2^1 - \omega_4^2),$$

$$\omega_2^3 = m\omega^1 + n\omega_4^1 , \quad \omega_2 = n\omega^1 + p\omega_4^1 ,$$

$$\omega_1^3 = r\omega^1 + s\omega_4^1 - (m+nb)\omega^2, \quad \omega_1 = s\omega^1 + t\omega_4^1 - (n+bp)\omega^2,$$

$$\omega_3^4 = f\omega^1 + g\omega_4^1 , \quad \Omega_1 = \lambda\omega_4^1 + \mu\omega^1;$$

$$\Omega_2 = u\omega^1 + f\omega_4^1 - \frac{1}{2}c\omega^2, \qquad \omega_4^3 = \mu\omega_4^1 + \xi\omega^1 - \frac{1}{2}c\omega_4^2;$$

$$r + hc(s+tb) + sb = 0, \quad u + hc(f+gb) + fb - 2a = 0,$$

$$\xi + hc(\lambda b + \mu - 2a) + \mu b = 0,$$

$$h(1-b)(rp - 2ns + tm) + (n^2 - mp)(b - hc) = 0 .$$

Анализируя полученную систему уравнений, убеждаемся в спра дливости теоремы.

Аналогично, путем перехода к новому базису $\omega_4^1 = \vartheta_1$, $\omega_3^2 =$ получим систему пфаффовых и конечных уравнений пары $\mathcal{L}_2$:

$$\omega_3^1 = 0, \quad \omega_1^2 = \mu_1\vartheta_2 , \quad \omega_2^1 = \frac{1}{2}(\mu_2\vartheta_1 + \omega_4^2), \quad \omega_1 = \mu_3\vartheta_1 + \mu_4\vartheta_2 ,$$

$$\omega_2 = \mu_5\vartheta_1 , \quad \omega_1^3 = \mu_6\vartheta_2 - \mu_7\omega_1 , \quad \omega_4^2 = \mu_7\vartheta_2 ,$$

$$\omega_2^3 = -(\mu_4 + \mu_5\mu_7)\vartheta_1 + \mu_8\vartheta_2 , \qquad \omega_3^4 = \rho_1\vartheta_1 - \frac{1}{2}\mu_2\vartheta_2 ,$$

$$\Omega_1 = \rho_3\vartheta_1 - \frac{1}{2}\mu_2\omega_4^2 , \qquad \Omega_2 = \rho_2\vartheta_2 - \mu_7\omega_3^4 ,$$

$$\omega_4^3 = \rho_4\vartheta_2 - (\rho_3\mu_7 - 2\mu_1)\vartheta_1 ,$$

где

$$\mu_5\mu_6 + \mu_3\mu_8 + (\mu_4)^2 = 0 .$$

Из анализа системы уравнений пары $\mathcal{L}_2$ следует, что пары $\mathcal{L}_2$ существуют и определяются с произволом одиннадцати функций одного аргумента.

К 5I4.75

$\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

И.Е.Лисицина

(Калининградский государственный университет)

В данной работе продолжается изучение теории двухсостав-)го $\mathcal{H}$-распределения трехмерного проективного пространства P_3 [7]. Известно [7], что $\mathcal{H}$-распределение в P_3 – это па- распределений, состоящая из базисного распределения прямых Λ_1 (Λ_1-распределение) и оснащающего H_2-распределения оскостей (H_2-распределение) с отношением инцидентности их ответствующих элементов в общем центре L_0 следующего вида: $\in \Lambda_1(L_0) \subset H_2(L_0)$. В работе изучаются проективные связности Λ_1-подрасслоении и H_2-подрасслоении. Все исследования оводятся в специализированном репере $\mathcal{R}_2(\mathcal{H})$ [7]. Схема ис-льзования индексов такова: $\bar{J}, \bar{K}, \bar{L}, \ldots = \overline{0,3}$; $J, K, L, \ldots = \overline{1,3}$; $p, q, s, \ldots = 0,1$; $\bar{\rho}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}, \ldots = \overline{0,2}$; $\rho, \varepsilon, \sigma, \ldots = 1,2$; $u, v, \ldots = 2,3$.

Трехмерное проективное пространство P_3 будем трактовать ак многообразие P°-структуры [5], базой которого является ехмерное точечное пространство, слоями – трехмерные центро-оективные пространства и структурной группой – центропроек-ивная группа.

Рассматриваемые в P_3 Λ_1-распределение, H_2-распреде-ние и все присоединенные к ним нормальные распределения, ементы которых являются точечными центропроективными прост-анствами, можно интерпретировать как подрасслоения этого ногообразия P°-структуры с общим многообразием опорных об-азов, т.е. как Λ_1-подрасслоение, H_2-подрасслоение и нор-альные подрасслоения многообразия P°-структуры. Следователь-, $\mathcal{H}$-распределение в P_3 трактуется как пара подрасслоений Λ_1-подрасслоение и H_2-подрасслоение) многообразия P°-руктуры с условием инцидентности $\Lambda_1(L_0) \subset H_2(L_0)$ в каждой то-е L_0 базы $B_3 = P_3$ слоев $\Lambda_1(L_0)$, $H_2(L_0)$. Многообразие P°-руктуры, в котором задано $H_2(\Lambda_1)$-подрасслоение (или кратко $\mathcal{H}$-подрасслоение), назовем расслоенным многообразием $P^\circ(\mathcal{H})$-руктуры или кратко – многообразием $P^\circ(\mathcal{H})$.